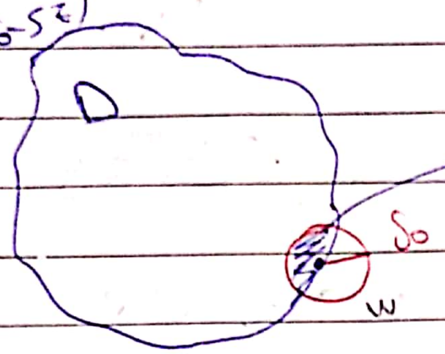
20/3/21

(σελ 56-57)



$D \cap D(w, \delta_0)$

$$|Re z - Re w| = |Re(z-w)| \le |z-w| = \left((Re(z-w))^2 + (Im(z-w))^2 \right)^{1/2}$$

$|\bar{z} - \bar{w}| = |z-w|$ αντίστοιχα $|Im z - Im w| =$

$= |Im(z-w)| \le |z-w|$

$||z| - |w|| \le |z-w|$

SOS $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z} \nexists$!

Στον Απειρο δεν είχαμε συναντήσει τα όρια:

$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$, $\lim_{z \to \infty} f(z) = b \in \mathbb{C}$, $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$

Scanned with CamScanner

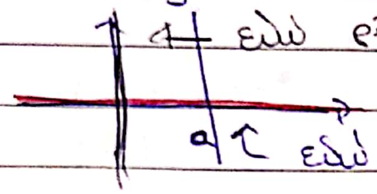
Η ιδέα είναι ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τα σύνολα: $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ $[=: D^*(\infty, r)]$ $(r>0)$ ως περιοχές ανοικτές του ∞ χωρίς το ∞, όπως θεωρούμε το $D^*(0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \varepsilon\}$ ως ανοικτή περιοχή του 0 χωρίς το 0.

μηδέν

$(*) \overset{(\Leftrightarrow)}{} \dfrac{1}{|z|} < \dfrac{1}{r}$

SOS $\lim_{z \to \infty} e^z \nexists$!!! [Θα έπρεπε $\forall (z_n) \subset \mathbb{C}$ με $z_n \to \infty$: $e^{z_n} \to \infty$ αλλά π.χ. $z_n = i2\pi n \to \infty$, αφού $|z_n| = 2\pi n \to +\infty$ ενώ $e^{z_n} = e^{i2\pi n} = 1 \to 1 \neq \infty$]

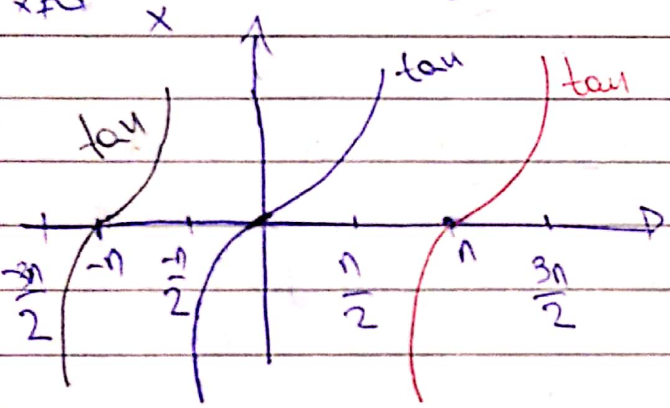
Να προσεχθεί ότι η $e^x, x \in \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένη ενώ η $e^{iy}, y \in \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, αφού $|e^{iy}| = 1$

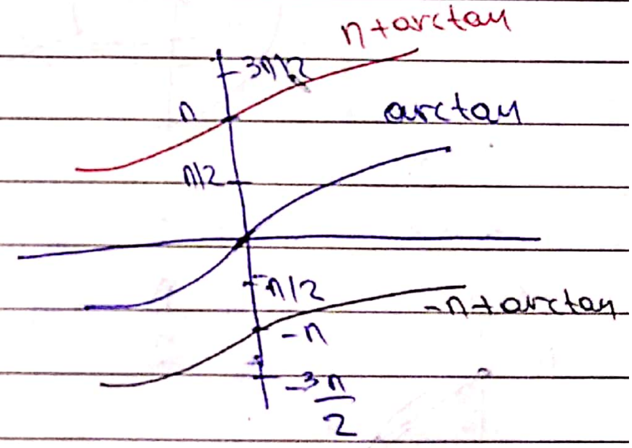


$\forall z \in \{\mathrm{Re}\, z \leq a\} : |e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} \leq e^a < +\infty$

$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} = \underbrace{|z| \cos(\operatorname{Arg} z)}_{= x} + i \underbrace{|z| \sin(\operatorname{Arg} z)}_{= y}, \; z \in \mathbb{C}^*$

$\underset{x \neq 0}{\Rightarrow} \dfrac{y}{x} = \tan(\operatorname{Arg} z)$



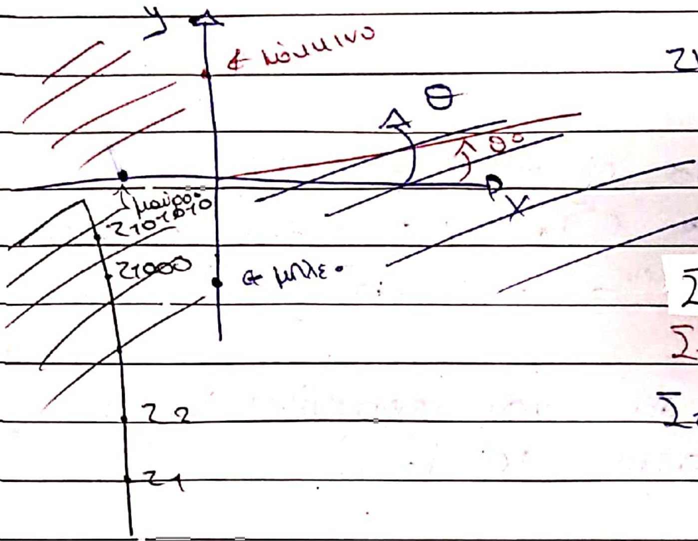


Αν $\operatorname{Arg} z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: $\arctan \dfrac{y}{x} = \operatorname{Arg} z$

Αν $\operatorname{Arg} z \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$: $\pi + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) = \operatorname{Arg} z$ για $\operatorname{Arg} z \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Αν $Arg z \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$: $-\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = Arg z$, για $Arg z \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$

Υπενθύμιση: Θέλουμε $Arg z \in (-\pi, \pi]$ (αυθαίρετο)



$z_n = \frac{1}{n} e^{i\theta} \to z_n \to 0$, $Arg z_n = \theta \to \theta$

$w_n = \frac{1}{n} e^{i\theta_0} \to w_n \to 0$, $Arg w_n = \theta_0 \to \theta_0$

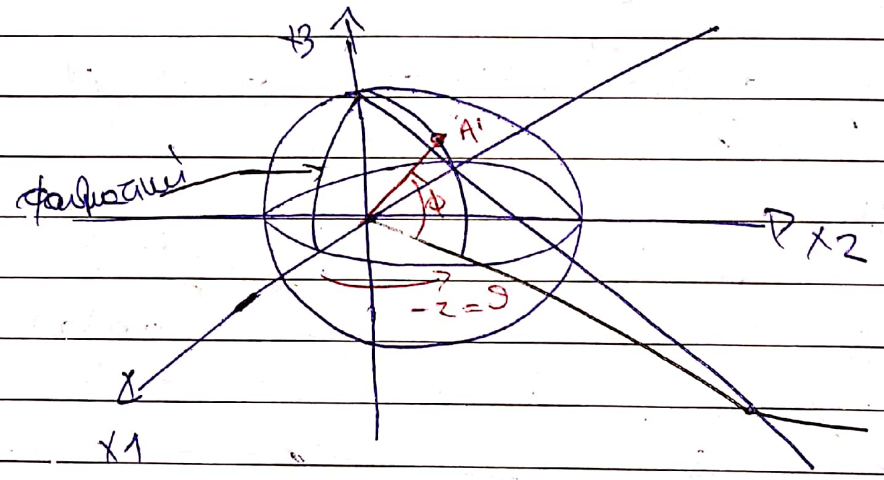
Στο • μη συνεχής η Arg z

Στο • συνεχής

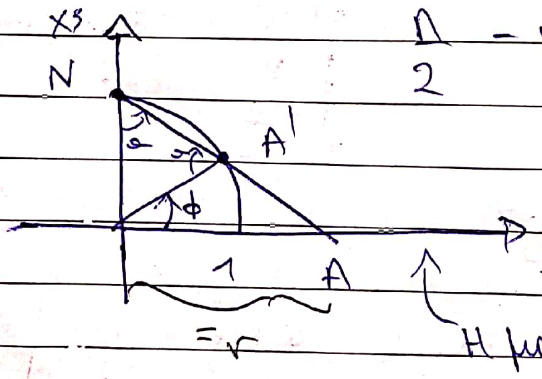
Στο • συνεχής

Για $z_n \to x_0 \in (-\infty, 0)$ έχουμε $Arg z_n \to -\pi \neq \pi = Arg x_0$

$\tilde{E} = \{z \in \mathbb{C} : Re z < 0, Im z < 0\}$



$A = \sigma(A') = |z|$



$\frac{\pi}{2} - \varphi + 2a = \pi$

$a = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$

$\tan a = \frac{r}{1} \Rightarrow r = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \| $

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad |z|$